Kapitel 26 - Der Kotangens und der Herglotz-Trick

Valerie Alves da Veiga Grzandziel

23. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir betrachten in diesem Kapitel des Buches "Das Buch der Beweise"die Partialbruchzerlegung des Kotangens, die von Euler bewiesen wurde:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}) \qquad (x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z})$$

Dies können wir auch eleganter schreiben als:

$$\pi \cot \pi x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \tag{1}$$

Wir werden (1) mit einer Idee von Gustav Herglotz beweisen, dem "Herglotz-Trick".

2 Beweis

Für den Beweis definieren wir zuerst zwei Funktionen, f und g:

$$f(x) = \pi \cot \pi x \qquad\qquad g(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

Als erstes werden wir jetzt für diese beiden Funktionen gemeinsame Eigenschaften erarbeiten.

2.1 Stetigkeit

Wir wollen als erstes zeigen das f und g für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ definiert sind und in diesen Werten stetig sind. Für f ist dies klar:

$f(x) = \pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ definiert und stetig, da $\sin \pi x \neq 0$ für $x \notin \mathbb{Z}$.

Wir werden erstmal (1) umschreiben indem wir benutzen dass:

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{x-n+x+n}{(x+n)(x-n)} = \frac{2x}{x^2-n^2} = -\frac{2x}{n^2-x^2}$$

Somit haben wir also:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \tag{2}$$

Für g müssen wir also zeigen dass $g(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$ in allen $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ definiert und stetig ist. Da $x \neq 0$ und $n^2 - x^2 \neq 0$ für $x \notin \mathbb{Z}$ ist g in diesen Werten definiert. Wir wissen auch das für $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ stetig ist, und wir können den zweiten Teil so umschreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2}$$

Da auch $2x$ stetig ist müssen wir nur noch die Stetigkeit von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2}$$

überprüfen:

Wir wollen die Stetigkeit von g in einem Punkt $x_0 \in (m, m+1)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Sei $\varepsilon < 0$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ konvergiert:

$$\exists n_0 > 1 : \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Nun können wir schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n \leqslant max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x^2} + \sum_{n > max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

Wenn wir die erste Summe betrachten, stellen wir fest dass es sich um eine endliche Summe von stetigen Funktionen handelt, wir können also unser δ so wählen, das für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt:

$$\sum_{n \leqslant max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n \leqslant max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x_0^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Für die zweite Summe beachten wir dass:

$$\begin{aligned} n > max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\} \\ \Rightarrow 2n - 1 > max\{m^2, (m+1)^2\} \\ \Rightarrow 2n - 1 > x^2 \end{aligned}$$

und somit:

$$\sum_{n > max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x^2} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Zusammen haben wir dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x_0^2}$$

$$= \underbrace{\sum_{n \leqslant max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \left(\frac{1}{n^2 - x^2} - \frac{1}{n^2 - x_0}\right)}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n > max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x^2}}_{< \frac{\varepsilon}{3}} - \underbrace{\sum_{n > max\{n_0, \frac{m^2+1}{2}, \frac{(m+1)^2+1}{2}\}} \frac{1}{n^2 - x_0^2}}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ stetig und somit ist gezeigt das g stetig auf $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

2.2 Periodizität

Wir wollen als nächstes zeigen dass f und g periodisch sind mit Periode 1, also dass $f(x+1) = f(x)$ und $g(x+1) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Für f haben wir:

$$f(x+1) = \pi \cot(\pi x + \pi) = \pi \cot \pi x = f(x),$$

da Kotangens Periode π hat. Also ist f periodisch mit Periode 1.

Für g betrachten wir zunächst:

$$g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

Dann ist:

$$g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}$$

Es folgt:

$$g(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_N(x+1) = \lim_{N\to\infty} (g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}) = \lim_{N\to\infty} g_{N-1}(x) = g(x)$$

und somit ist auch g periodisch mit Periode 1.

2.3 Die Funktionen f und g sind ungerade

f und g sind ungerade Funktionen, also ist $f(-x) = -f(x)$ und $g(x) = -g(x)$.

Für f haben wir:

$$f(-x) = \pi \cot(-\pi x) = \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = \pi \frac{\cos \pi x}{-\sin \pi x} = -\pi \cot \pi x = -f(x)$$

also ist f ungerade.

Für g betrachten wir:

$$g_N(-x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{-x+n} = \sum_{n=-N}^{N} -\frac{1}{x-n} = -\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = -g_N(x)$$

und da wir wissen dass

$$g(-x) = \lim_{N\to\infty} g_N(-x) = \lim_{N\to\infty} (-g_N(x)) = -g(x)$$

und somit ist auch g ungerade.

2.4 Funktionalgleichung für f und g

Wir wollen zuletzt für f und g noch zeigen das sie die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x), \qquad g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x)$$

Betrachten erneut zuerst f:

$$f(\frac{x}{2})+f(\frac{x+1}{2}) = \pi\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}+\pi\frac{\cos(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})} = \pi(\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}) = \pi(\frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})-\sin^2(\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2})})$$

$$= 2\pi\frac{\cos(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2})} = 2\pi\cot\pi x = 2f(x)$$

Überprüfen jetzt noch die Funktionalgleichung für g indem wir erneut g_N benutzen:

$$g_N(\frac{x}{x}) + g_N(\frac{x+1}{2} = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} = \sum_{n=-N}^{N}(\frac{1}{\frac{x}{2}+n}+\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n})$$

$$= 2\sum_{n=-N}^{N}(\frac{1}{x+2n}+\frac{1}{x+2n+1}) = 2\sum_{n=-2N}^{2N}\frac{1}{x+n}+\frac{2}{x+2N+1} = 2g_{2N}(x)+\frac{2}{x+2N+1}$$

Dann haben wir:

$$g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = \lim_{N\to\infty}(2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}) = 2g(x)$$

Somit gilt die Funktionalgleichung für f und g.

2.5 Die Funktion h

Wir setzen nun:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \pi\cot\pi x - (\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}) \tag{3}$$

Die Funktion h ist somit auch stetig in $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, sowie periodisch mit Periode 1, ungerade und erfüllt ebenfalls die Funktionalgleichung:

$$h(\frac{x}{2}) + h(\frac{x+1}{2}) = 2h(x)$$

Wir wollen nun h an den ganzen Zahlen analysieren und werden dafür den Limes von $h(x)$ betrachten für $x \to 0$. Betrachten dafür zuerst:

$$\lim_{x\to 0}(\cot x - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} \underbrace{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{x\cos x + \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{x\cos x + \sin x} \underbrace{=} \lim_{x\to 0} \frac{-x\cos x - \sin x}{-x\sin x + \cos x + \ cosx} = \frac{0}{2} = 0$$

wobei wir zweimal die Regeln von de l'Hospital verwenden. Hieraus können wir durch eine Substitution $y = \frac{x}{\pi}$, also $x = \pi y$ und Multiplikation mit y erhalten dass:

$$\lim_{x\to 0}(\cot x - \frac{1}{x}) = \lim_{y\to 0}(\pi \cot \pi y - \frac{1}{y}) = 0$$

Weiterhin haben wir dass die letzte Summe aus (3) auch gegen 0 konvergiert:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2},$$

woraus folgt dass $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ und da $h(x+1) = h(x)$, also, da h periodisch mit Periode 1 ist kriegen wir, dass:

$$\lim_{x\to n} h(x) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Nun setzen wir $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Somit ist h eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ die die Eigenschaften von f und g erbt. Also ist h auch ungerade, periodisch und erfüllt die obige Funktionalgleichung.

Nun kommen wir zum letzten Schritt unseres Beweises:
Da h periodisch und stetig ist besitzt die Funktion ein Maximum m. Sei $x_0 \in [0,1]$, so dass $h(x_0) = m$.
Mit der Funktionalgleichung kriegen wir:

$$h(\frac{x_0}{2}) + h(\frac{x_0+1}{2}) = 2h(x_0) = 2m$$
$$\Rightarrow h(\frac{x_0}{2}) = m = h(\frac{x_0+1}{2})$$

Mit Iteration kriegen wir dann aber für alle n, dass:

$$h(\frac{x_0}{2^n}) = m$$

und wenn $n \to \infty$ kriegen wir wegen der Stetigkeit: $h(0) = m$. Wir hatten aber schon definiert dass $h(0) = 0$, also folgt daraus dass $m = 0$ und somit folgt:

$$h(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Da h ungerade ist gilt aber auch:

$$h(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und daraus folgt
$$h(x) = 0 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
.
Somit haben wir also:
$$h(x) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow \pi \cot \pi x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

$\square$

3 Berühmte Folgerung

Wir werden nun noch eine Folgerung der Formel (1) betrachten, die die Werte der Riemmanschen Zeta-Funktion in geraden positiven Zahlen betrifft:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

Wir werden nachvollziehen wie Euler 1755 die Reihe (4) behandelte:
Mit Hilfe der Formel (2):

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \qquad | \cdot x$$

$$\pi x \cot \pi x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2\pi^2}{\pi^2 n^2 - \pi^2 x^2} \qquad |\text{Setzen } \ y = \pi x$$

$$y \cot y = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2}$$

$$y \cot y = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{y}{\pi n})^2}$$

Für $|y| < \pi$ haben wir die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((\frac{y}{\pi n})^2)^k = \frac{1}{1 - (\frac{y}{\pi n})^2},$$

und somit:

$$y \cot y = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^{2k} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^{2k+2}$$

$$= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{y}{\pi n})^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}) y^{2k}$$

Erhalten somit den Koeffizienten von y^{2k} in der Reihenentwicklung von $y \cot y$:

$$[y^{2k}] y \cot y = -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \tag{5}$$

Betrachten noch einen zweiten Weg eine Reihenentwicklung für $y \cot y$ zu erhalten. Wir wissen schon aus der Analysis dass:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Daraus folgt:

$$y \cot y = iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} = iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}$$

Wir substituieren nun $z = 2iy$:

$$y \cot y = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z - 1 + 2}{e^z - 1} = \frac{z}{2}(1 + \frac{2}{e^z - 1}) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

Haben also:

$$y \cot y = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} \tag{6}$$

Wir brauchen jetzt eine Reihenentwicklung für $\frac{z}{e^z-1}$. Nehmen wir an:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!} \tag{7}$$

wobei die Koeffizienten B_n Bernoulli-Zahlen heißen.

Da $y \cot y$ eine gerade Funktion ist folgt für $n \geqslant 3$ und ungerade, dass $B_n = 0$, während $B_1 = -\frac{1}{2}$, was dem Summanden $\frac{z}{2}$ in Formel (7) entspricht und somit ist auch die rechte Seite der Gleichung gerade.

Aus:

$$(\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!})(e^z - 1) = (\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!})(\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} - 1)$$

$$(\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!})(\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n!}) = z$$

erhalten wir durch Koeffizienten Vergleich für z^n:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1, \text{ für } n = 1 \\ 0, \text{ für } n \neq 1 \end{cases} \tag{8}$$

Dies können wir erkennen wenn wir folgendes betrachten:

$$(\sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!})(\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}) = (\frac{B_0 z^0}{0!} + \frac{B_1 z^1}{1!} + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + ...)(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...)$$

$$= \frac{B_0 z^1}{0!1!} + \frac{B_0 z^2}{0!2!} + \frac{B_1 z^2}{1!1!} + \frac{B_0 z^3}{0!3!} + \frac{B_1 z^3}{1!2!} + \frac{B_2 z^3}{2!1!} + ... = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} z^n = z$$

Aus (8) kann man nun die Bernoulli-Zahlen rekursiv berechnen. Für $n = 1 : B_0 = 1$. Für $n = 2 : \frac{B_0}{2} + B_1 = 0$, also, $B_1 = -\frac{1}{2}$, und so weiter.

Aus (6) und (7) ergibt sich

$$y \cot y = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot B_{2k}}{(2k)!} y^{2k}$$

und mit (5) folgt dann:

$$\frac{(-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot B_{2k}}{(2k)!} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k)$$

Also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot B_{2k}}{(2k)! \cdot (-1) \cdot 2} \pi^{2k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-1} \cdot B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} \qquad (k \in \mathbb{N}) \qquad (9)$$

In Kapitel 9 wird bewiesen dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Mit Formel (9) können wir dies auch zeigen. Berechnen dafür noch B_2:

$$\frac{B_2}{2!1!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_0}{0!3!} = 0 \Leftrightarrow B_2 = 2(-\frac{B_0}{6} - \frac{B_1}{2}) = -\frac{B_0}{3} - B_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Somit haben wir jetzt:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{(-1)^{1-1} \cdot 2^{2-1} \cdot B_2}{2!} \pi^2 = B_2 \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Mit dieser Formel könnten wir also die Werte der Riemmanschen Zeta-Funktion in geraden positiven Zahlen berechnen indem wir die Bernoulli-Zahlen rekursiv ausrechnen oder in einer Tabelle überprüfen. Was die Werte der Reimmanschen Zeta-Funktion in ungeraden Zahlen angeht weiß man im Gegensatz sehr wenig.

4 Literatur

AIGNER, M.; ZIEGLER, G.M.: Das Buch der Beweise, Springer, 5.Auflage, 207-212